12 GENEL ÖLÇÜLER İÇİN İNTEGRASYON

Bu bölümde, bir genel ölçü uzayı (X, S, r) üzerinde genişletilmiş reel değerli bir fonksiyonun r'ye göre integralini tanımlayacağız. Ölçüler, negatif olmayan, tam ve en azından σ-sonlu olarak kabul edilecektir. Fonksiyonlar ve kümeler üzerine sınırlılık ve sonlu ölçü olma şartı konmayacaktır.

<u>Tanım</u>: Her a ve b için $\{x \mid a \le f(x) < b\}$ kümesi ölçülebilir ise f fonksiyonuna <u>ölçülebilir</u> denir. (Yani $\{x \mid a \le f(x) < b\} \in S$ ve r tanımlıdır).

S, σ-cebri olduğundan f'nin ölçülebilirliği, Bölüm 5, Teorem 4'deki kümelerin ölçülebilirliğine denktir. Grafiği, $\bigcup(E_i \times [-\overline{M}_i, \overline{M}_i])$, ($\sum \overline{M}_i r(E_i) < \infty$ olmak üzere) sonlu bölgesinde olan fonksiyonlar için ölçülebilir ile integrallenebilme yine denktir.

S ölçülebilir bir küme olsun. (Yani $S \in \mathcal{S}$). S'nin bir $P = \{E_i\}$ <u>parçalanışı</u>, birleşimleri S olan, sonlu ölçülü, ayrık ölçülebilir kümelerin sayılabilir veya sonlu bir ailesidir. X, σ-sonlu olduğundan, X dahil, ölçülebilir kümelerin parçalanışları vardır. S'nin bir $Q = \{F_j\}$ parçalanışı, her F_j kümesi P'deki bir E_i kümesinin alt kümesi olma şartını sağlıyorsa, P'nin bir <u>inceltilmisi</u> denir ve $P \prec Q$ veya $Q \succ P$ ile gösterilir. $\prec$ kısmi sıralaması altında S'nin parçalanışları bir yönlü küme oluşturur.

<u>Problem 1</u>: Bütün ölçülebilir kümelerin, parçalanışlarının olduğunu gösteriniz.

S'nin $P = \{E_i\}$ parçalanışı için $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in E_i\}$, $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in E_i\}$ ve $\overline{M}_i = \sup\{|f(x)| \mid x \in E_i\}$ olsun. Eğer $\sum \overline{M}_i r(E_i)$

sonlu (yani $\sum \overline{M}_i \, r(E_i) < \infty$) ise P'ye S üzerinde f için bir geçerli parçalanış ve f'ye S üzerinde bir geçerli fonksiyon denir.

Eğer P, geçerli bir parçalanış ise yalnız bu durumda

$$L(f,P) = \sum m_i \, r(E_i) \quad , \quad U(f,P) = \sum M_i \, r(E_i) \qquad (*)$$

yazılacaktır. Geçerli parçalanışlar için, $(*)$ ile verilen alt ve üst toplamlar ya sonlu toplamlar yada mutlak yakınsak serilerdir. f sınırsız ve hatta $\pm\infty$ değerlerini alabileceğinden m_i ve M_i değerleri sonsuz olabilir. Bu durumda $r(E_i)=0$ olmalıdır. Böylece $\overline{M}_i \, r(E_i)=0$ dır. Uygunluk bakımından verilen parçalanışlarda sıfır ölçülü kümeleri tek bir E_0 kümesi ile gösterip, onu göz ardı edebiliriz.

$L(f,P)$ alt toplamları ve $U(f,P)$ üst toplamları geçerli P parçalanışları üzerinde netlerdir. Bir parçalanış inceltildiği zaman alt toplamlar artan, üst toplamlar azalan ve bütün alt toplamlar bütün üst toplamlardan daha küçük veya eşittir. Alt toplamlar $\{L(f,P)\}$ herhangi bir üst toplam ile üstten sınırlı artan bir net oluşturur ve üst toplamlar $\{U(f,P)\}$ alttan sınırlı azalan bir net oluşturur. Her iki nette yakınsak ve

$$\lim_P L(f,P) = \sup_P L(f,P) \leq \inf_P U(f,P) = \lim_P U(f,P)$$

dır. Eğer limitler eşit ise f, S üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\int_S f = \lim_P U(f,P) = \lim_P L(f,P)$$

yazılır.

Problem 2: f ve g, S üzerinde integrallenebilir ve S üzerinde, h.h.h. $f \leq g$ ise

$$\int_S f \leq \int_S g$$

dır.

Problem 3: Eger g fonksiyonu sonlu ölçülü T kümesi üzerinde sabit $g=k$ ve $S-T$ üzerinde $g=0$ ise $\int_S g = k\,v(T)$ dir.

Teorem 1) f, ölçülebilir S kümesi üzerinde, geçerli ve ölçülebilir ise f, S üzerinde integrallenebilirdir.

Kanıt: $P=\{E_i\}$, S'nin geçerli bir parçalanışı olsun. Bu durumda $\sum \overline{M}_i\, v(E_i) < \infty$ dur. $\varepsilon>0$ sayısı verilsin ve $\sum_{i=N+1}^{\infty} \overline{M}_i\, v(E_i) < \varepsilon$ olacak şekilde N sayısını seçelim. $T=E_1\cup\dots\cup E_N$ kümesi sonlu ölçüye sahiptir ve $|f|$, $K=\text{maks}\{\overline{M}_1,\dots,\overline{M}_N\}$ olmak üzere K ile T kümesi üzerinde sınırlıdır. $\{I_1,I_2,\dots,I_m\}$, $[-K,K]$ aralığının, her birinin uzunluğu $\frac{\varepsilon}{v(T)}$ den küçük olan ayrık aralıkların bir örtüsü olsun. $F_j=\{x\in T \mid f(x)\in I_j\}$ alınırsa $Q=\{F_j\}$, T'nin bir parçalanışı ve

$$U(f,Q)-L(f,Q) \le \sum \frac{\varepsilon}{v(T)}\, v(F_j) = \varepsilon$$

dır. Q'nun kümeleri ile $E_{N+1}, E_{N+2}\dots$ S'nin bir P_0 parçalanışını oluşturur ve

$$U(f,P_0)-L(f,P_0) < U(f,Q)-L(f,Q) + \sum_{i=N+1}^{\infty} (M_i-m_i)\, v(E_i) < \varepsilon+2\varepsilon = 3\varepsilon$$

sonucu elde edilir. ■

Şimdi bir fonksiyon integrallenebiliyorsa ölçülebilir olduğunu göstereceğiz. Bunun için basit fonksiyon tanımını uygun hale getirmek için geliştiriyoruz. $\{E_i\}$'ler sonlu veya sayılabilir ayrık sonlu ölçülü kümelerin bir ailesi olmak üzere $\sum |a_i|\, v(E_i) < \infty$ şartını sağlayan $\varphi=\sum a_i \chi_{E_i}$ fonksiyonuna bir <u>basit fonksiyon</u> denir.

Eger $P=\{E_i\}$, S üzerinde f için geçerli bir parçalanış ve m_i ve M_i bilinen notasyonlar olmak üzere

$$\varphi_P(x)=\sum m_i \chi_{E_i}(x) \quad , \quad \psi_P(x)=\sum M_i\, \chi_{E_i}(x)$$

ise φ_P ve ψ_P, $\varphi_P\le f\le \psi_P$ şartını sağlayan basit fonksiyonlardır.

Problem 4: Yukarıda tanımlanan ϕ_P ve ψ_P basit fonksiyonlarının integrallenebilir ve integrallerinin sırasıyla $L(f,P)$ ve $U(f,P)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 4, alt ve üst toplamlar ile yaklaşımın, alt ve üst basit fonksiyonların integralleri ile yaklaşımıyla denk olduğunu gösterir. Bu yüzden, S üzerinde bir f fonksiyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter şartın her $\varepsilon>0$ için $\phi\leq f\leq\psi$ ve $\int\psi-\int\phi<\varepsilon$ şartını sağlayan S üzerinde ϕ ve ψ basit fonksiyonlarının olması gerektiğini söyler.

Problem 5: Bir basit fonksiyonun ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

Problem 6: Ölçülebilir fonksiyonlar dizisinin h.h.h. noktasal yakınsadığı limit fonksiyonu ölçülebilirdir.

Problem 7: $\{g_n\}$, S üzerinde integrallenebilir ve negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir azalan dizisi olsun. $\int_S g_n\to 0$ ise h.h.h. $g_n\to 0$ dır. "h.h.h" gerekli olduğunu gösteriniz.

Teorem 2: f, S üzerinde integrallenebilir ise f ölçülebilirdir.

Kanıt: $P_1<P_2<P_3<\cdots$, $U(f,P_n)-L(f,P_n)<\frac{1}{n}$ şartını sağlayan S'nin geçerli parçalanışlarının bir dizisi olsun. ϕ_n ve ψ_n, $\int\phi_n=L(f,P_n)$ ve $\int\psi_n=U(f,P_n)$ şartlarını sağlayan basit fonksiyonlar olsun. $P_1<P_2<P_3<\cdots$ olduğu için ölçülebilir fonksiyonların artan $\{\phi_n\}$ bir dizisi ve her n için $\phi_n\leq f$ dir. Benzer şekilde, $\{\psi_n\}$ azalan bir dizi ve $\psi_n\geq f$ dir. $\{\psi_n-\phi_n\}$, negatif olmayan, azalan ve problem 5'den dolayı ölçülebilir fonksiyonlardır.

$$\int(\psi_n-\phi_n)=U(f,P_n)-L(f,P_n)\longrightarrow 0$$

Problem 7'den, h.h.h. $\psi_n-\phi_n\to 0$ dır. Buna göre h.h.h. $\phi_n\to f$ dir ve f ölçülebilirdir. ■

İntegral, bir lineer fonksiyoneldir. Verilen tanımdan bunu görmek zor olduğu için, tekrar, integrali Riemann toplamlarının limiti olarak göstereceğiz. $R(kf,P,c)=kR(f,P,c)$, $R(f+g,P,c)=R(f,P,c)+R(g,P,c)$ ve sabitin limiti ile limitlerin toplamı, toplamların limiti olduğundan integralin lineerliği açıkça görünür.

$P=\{E_i\}$, S için geçerli bir parçalanış ve f, S üzerinde geçerli bir fonksiyon ise her i için $c_i \in E_i$ olmak üzere $R(f,P,c)=\sum f(c_i)\gamma(E_i)$ olarak tanımlanır. $R(f,P,c)$ notasyonunu geçerli parçalanışlar için kullanacağız. (P,c) çiftleri üzerinde sıralama $P<P'$ ise $(P,c)<(P,c')$ anlamındadır. Bu sıralama ile (P,c) çiftleri bir yönlü küme oluşturur. Her P ve c için

$$L(f,P)\leq R(f,P,c)\leq U(f,P)$$

dir. f integrallenebilir ise $\{R(f,P,c)\}$ neti integrale yakınsar.

Problem 8: f, S üzerinde integrallenebir ise $\{R(f,P,c)\}$ netinin $\int_S f$ 'ye yakınsadığını gösteriniz.

Problem 9: f ve g, S üzerinde integrallenebilir ise $f+g$ ve kf, S üzerinde integrallenebilir ve

$$\int_S (f+g)=\int_S f+\int_S g \quad , \quad \int_S kf = k\int_S f$$

dir.

Teorem 3: f, S üzerinde tanımlı ise $\lim_P R(f,P,c)=I$ olması için gerek ve yeter şart f'nin S üzerinde integrallenebilir (ölçülebilir) ve $\int_S f=I$ olmasıdır.

Kanıt: Teoremin bir tarafı problem olarak Problem 8'de verilmiştir. $R(f,P,c)\to I$ olduğunu kabul edelim. ε sayısı verilsin ve P_0, $P>P_0$ iken $|R(f,P,c)-I|<\varepsilon$ şartını sağlayan bir parçalanış olsun. Buna göre, P_0 için herhangi iki Riemann $R(f,P_0,c)$ ve $R(f,P_0,c')$ toplamının farkı 2ε'dan küçük olacaktır. $c_i \in E_i$, $f(c_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{2^i r(E_i)}$ olacak şekilde seçilerek $R(f,P_0,c)$'nin $U(f,P_0)$ ile farkının ε'dan küçük olması sağlanır. Benzer şekilde $c_i' \in E_i$, $R(f,P_0,c')$'nin $L(f,P_0)$ ile farkının ε'dan küçük olacak şekilde seçilir. Buna göre $U(f,P_0) - L(f,P_0) < 4\varepsilon$ dur ve f integrallenebilirdir. Problem 8'e göre $\lim R(f,P,c) = \int f$ dir. ■

Lebesgue integrali için limit teoremleri aşağıdaki temel gerçeklere dayanır.

I. Sonlu ölçülü bir T kümesi üzerinde $f_n \to f$ düzgün yakınsıyor ise $\int_T f_n \to \int_T f$ dir. Bu Riemann integralindeki yakınsaklık teoremidir.

II. Sonlu ölçülü bir S kümesi üzerinde $f_n \to f$ noktasal yakınsıyorsa, yeterince küçük ölçülü kümelerin dışında $f_n \to f$ düzgün yakınsar.

III. S üzerinde $g \geq 0$ ise S'nin aşağıdaki özellikleri sağlayan sonlu ölçülü T alt kümeleri vardır. T üzerinde g sınırlı ve $\int_T g$, $\int_S g$'ye yeterince yakındır. $|f_n| \leq g$ ve $f_n \to f$ ise

$$\int_T f_n \to \int_T f$$

dir ve bütün T integralleri, S üzerindeki integrallere yakındır.

<u>Teorem 4 (Egoroff Teoremi)</u>: $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve sonlu ölçülü S kümesi üzerinde h.h.h. $f_n \to f$ ise verilen $\delta > 0$ sayısı için öyle özel bir $E \subset S$ kümesi vardır ki $r(E) < \delta$ ve E'nin dışında $f_n \to f$ düzgün yakınsar.

<u>Problem 10</u>: S üzerinde h.h.h. $f_n \to f$ ise Egoroff teoreminin doğru olduğunu gösteriniz.

Problem 11: Sınırlı Yakınsaklık Teoremini kanıtlayınız: $\{f_n\}$, sonlu ölçülü bir S kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir düzgün sınırlı dizisi ve S üzerinde h.h.h. $f_n \to f$ ise

$$\int_S f_n \to \int_S f$$

dir.

Teorem 5: g, S üzerinde integrallenebilir ve $\varepsilon > 0$ ise sonlu ölçülü öyle bir E kümesi vardır ki $\int_{S-E} |g| < \varepsilon$ ve g, E üzerinde sınırlıdır.

Kanıt: $P = \{E_i\}$, g için S'nin bir geçerli parçalanışı olsun. Bu durumda $\sum \overline{M}_i\, v(E_i) < \infty$ dır. $\sum_{i=N+1}^{\infty} \overline{M}_i\, v(E_i) < \varepsilon$ ve $E = \bigcup_{i=1}^{N} E_i$ ise $\int_{S-E} |g| < \varepsilon$ ve E üzerinde $|g| \leq \text{maks}\{\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_N\}$ dir. ■

Problem 12: Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremini kanıtlayınız: $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi, $|f_n| \leq g$, g S üzerinde integrallenebilir ve h.h.h. $f_n \to f$ ise $\int_S f_n \to \int_S f$ dir.

Teorem 6 (Fatou's Lemma): $\{f_n\}$ negatif olmayan integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi ve S üzerinde h.h.h. $f_n \to f$ ise f integrallenebilirse $\liminf \int f_n \geq \int f$ ve f integrallenemezse $\lim \int f_n = \infty$ dur.

Problem 15: $f^+(x) = \text{maks}\{f(x), 0\}$ ve $f^-(x) = \min\{f(x), 0\}$ olarak tanımlansın. Buna göre $f^+(x) \geq 0$ ve $f^-(x) \leq 0$ dır.

i) f'nin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şartın f^+ ve f^- fonksiyonlarının ölçülebilir olması gerektiğini gösteriniz.

ii) f ölçülebilir ise f'nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart f^+ ve f^- fonksiyonlarının integrallenebilir olmasıdır. Bu durumda

$$\int f = \int f^+ + \int f^-$$

dir.

ÖRNEKLER

1) $X=\{a,b,c,d\}$, $S=\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}\}$

$\nu(\emptyset)=\nu(\{c,d\})=0$, $\nu(\{a\})=\nu(\{a,c,d\})=1$, $\nu(\{b\})=\nu(\{b,c,d\})=2$, $\nu(\{a,b\})=\nu(X)=3$

olarak verilsin. S, σ-cebri ve ν, S üzerinde bir ölçüdür.
ν tam ölçü değildir ((X,S,ν) ölçü uzayında ν'yü tam alıyoruz).

$f_1(a)=1$, $f_1(b)=0$, $f_1(c)=0$, $f_1(d)=-1$

$f_2(a)=1$, $f_2(b)=1$, $f_2(c)=0$, $f_2(d)=0$

ile tanımlı f_1 ve f_2 fonksiyonları integre edilebilir mi? İntegre edilirse değerini bulunuz.

f_1 ve f_2 sonlu değerler aldığından, bu değerlerin ters görüntülerinin ölçülebilir olması gereklidir.

$f_1^{-1}(\{1\})=\{a\}\in S$, $f_1^{-1}(\{0\})=\{b,c\}\notin S$, $f_1^{-1}(\{-1\})=\{d\}\notin S$

olduğundan f_1 ölçülebilir değildir. Dolayısıyla integre edilemez.

$f_2^{-1}(\{1\})=\{a,b\}\in S$ ve $f_2^{-1}(\{0\})=\{c,d\}\in S$

olduğundan f_2 ölçülebilir, yani integre edilebilirdir.

$$\int_X f_2 = 1\cdot\nu(\{a,b\})+0\cdot\nu(\{c,d\}) = 1\cdot 3+0\cdot 0=3.$$
$$= 1\cdot\nu(\{a\})+1\cdot\nu(\{b,c,d\}) = 1\cdot 1+1\cdot 2=3.$$

$(\inf U(f,P)=\sup L(f,P))$

2) $X=\mathbb{N}$, $S=2^{\mathbb{N}}$ ve $\nu(E)=\begin{cases} E\text{'nin eleman sayısı}, & E \text{ sonlu}\\ \infty, & E \text{ sonsuz}\end{cases}$

(ν sayma ölçüsü).

i) $f(n)=\frac{1}{n^2}$ ise $\int_{\mathbb{N}} f=?$

$$\int_{\mathbb{N}} f = 1\cdot\nu(\{1\})+\frac{1}{2^2}\nu(\{2\})+\dots+\frac{1}{n^2}\nu(\{n\})+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \text{ dır.}$$

ii) $A=\{1,2,\dots,n\}$ kümesi üzerinde $g(n)=n$ fonksiyonunun integralini hesaplayınız.

$$\int_A g = 1\cdot\nu(\{1\})+2\cdot\nu(\{2\})+\dots+n\,\nu(\{n\}) = 1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

iii) $h(n) = (-1)^n \frac{1}{n}$ olsun. h integre edilebilir mi?

$P = \{E_i\}$, $E_i = \{i\}$ parçalanışını alalım.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{M}_i \, v(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^i}{i}\right| \cdot 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

ve herhangi bir $Q = \{F_j\}$ parçalanışı için

$$\sum_{j=1}^{\infty} \overline{M}_j \, v(F_j) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{M}_i \, v(E_i) = \infty$$

olduğu için h geçerli fonksiyon değildir, yani integrallenemez.

3) $X = \mathbb{R}$, $S = 2^{\mathbb{R}}$, $\delta(E) = \begin{cases} 1, & 0 \in E \\ 0, & 0 \notin E \end{cases}$. $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}, \delta)$ ölçü uzayındaki δ ölçüsüne Dirac ölçüsü denir. $f(x) = \cos x^2$ fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığında Lebesgue integralini bulunuz.

$$\int_{[-1,1]} \cos x^2 = \int_{[-1,0)} \cos x^2 + \int_{\{0\}} \cos x^2 + \int_{(0,1]} \cos x^2 = \int_{\{0\}} \cos x^2 = \cos 0 \cdot \delta(\{0\})$$

$$= 1.$$